Моделирование нелинейных систем Винера-Гаммерштейна

А.Ф. Пащенко
Институт проблем управления РАН
Москва, Россия
e-mail: paschenko_alex@mail.ru

АБСТРАКТ

В работе предложен метод идентификации, основанный на методе функциональных преобразований и идеях статистической линеаризации. Предлагаемый метод представляет собой нелинейный аналог метода статистической линеаризации.

Рассматриваются, в основном, два критерия аппроксимации случайных функций. Для каждого из рассмотренных критериев получены уравнения идентификации и условия существования моделей в классе полулинейных систем. Частным случаем предложенного метода являются традиционные методы статистической линеаризации и методы дисперсионной идентификации. Приведены примеры решения задачи идентификации в классе систем, описываемых уравнениями Гаммерштейна и Винера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возрастание требований к эффективности систем управления влечет за собой повышение требований к точности и адекватности моделей управляемых объектов. Поскольку реальные объекты обычно характеризуются нелинейной, сложной структурой, а также неполнотой математического описания и информации как о самом объекте так и сигналах и помехах, действующих на него, существуют два подхода к решению задачи идентификации. Первый подход связан с аппроксимацией объекта набором элементарных звеньев известной структуры, а построение модели сводится к оценке характеристик этих звеньев по данным нормальной эксплуатации [1]. Сущность второго подхода состоит в желании ослабить зависимость результата решения задачи идентификации от ограничений, накладываемых априорными предположениями, и создании более общего унифицированного подхода к решению задачи идентификации. Примерами такого подхода являются разработки методов статистической линеаризации [2,3], метода функциональных преобразований [4,5] и дисперсионных методов идентификации [4,6].

В работе предложен метод идентификации, основанный на методе функциональных преобразований (МФП) [4,5] и идеях статистической линеаризации [2]. Предлагаемый метод представляет собой нелинейный аналог метода статистической линеаризации.

Частным случаем предложенного метода являются традиционные методы статистической линеаризации и методы дисперсионной идентификации. Приведены примеры решения задачи идентификации в классе систем, описываемых уравнениями Гаммерштейна.

Основная идея всех методов линеаризации заключается в замене нелинейного преобразования некоторым эквивалентным представлением, учитывающим нелинейную связь между входными и выходными сигналами системы. В основе метода статистической линеаризации [7], впервые изложенным И.Е. Казаковым [2] и Р. Бутоном [3] в начале 50-х годов, лежит идея аппроксимации нелинейного преобразования линеаризованной зависимостью между случайными функциями, статистически эквивалентной исходному нелинейному преобразованию.

При использовании статистических методов в основном применялись два критерия аппроксимации случайных функций. С точки зрения простоты вычислительной процедуры для определения коэффициентов статистической линеаризации второй критерий предпочтительнее. С точки зрения точности окончательных результатов в границах применимости метода статистической линеаризации они практически равноценны. В некоторых случаях при близких к нулю средних значениях сигналов первый способ может дать лучший результат [7].

Таким образом, как по первому, так и по второму критерию, нелинейное описание объекта заменяется двумя линейными операциями над математическими ожиданием и над случайной составляющей. Рассматриваются также различные комбинации результатов моделирования по первому и второму критериям.

В основе дисперсионных методов лежит использование условных математических ожиданий, функций регрессий и дисперсионных функций. Надо отметить, что в отличие от классического метода статистической линеаризации, при использовании которого получаем линейную модель, при применении дисперсионного метода получаем модель объекта в классе нелинейных моделей Гаммерштейна [4,6]. При этом нелинейное описание объекта заменяется суммой линейной операции над математическим ожиданием входного процесса и нелинейной операцией над центрированным входным процессом.

Известно, что для нелинейных стохастических систем, а также для систем, на входах которых действуют сигналы с нелинейной структурой, использование корреляционных функций часто приводит к нежелательным результатам, поскольку корреляционные функции не являются исчерпывающими характеристиками связи между случайными процессами [4,5,6] и могут обращаться в нуль даже тогда, когда существует детерминированная зависимость между входным и выходным процессами системы [4,6]. Для устранения негативных явлений, возникающих в этих случаях, предлагается использовать аппарат дисперсионных функций [4,6]. В дисперсионном подходе задача статистической линеаризации нелинейных динамических систем рассматривается как поиск оптимальных, в смысле задаваемых критериев, линейных преобразований в гильбертовом пространстве случайных функций. Конкретизация вида скалярного произведения в этом пространстве приводит к различным представлениям линеаризованных моделей, например к взаимным, автодисперсионным или смешанным моделям [4,6].

Однако, как показано в [4,5] дисперсионные меры связи, хотя и являются более мощным статистическим аппаратом, чем корреляционные функции, но также как и корреляционные функции не являются состоятельными мерами связи между случайными процессами. Поэтому в работе наряду с дисперсионными методами рассмотрен состоятельный метод идентификации нелинейных систем основанный на использовании обобщенных корреляционных функций и функциональной корреляции и идеях статистической линеаризации.

2. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим задачу идентификации нелинейной динамической системы в следующей интерпретации [5]. Идентифицируемая система описывается уравнением

$$Y(t)=F(X(s),t), \quad (1)$$

где X(t) – входной случайный сигнал, Y(t) – выходной случайный сигнал, F(·) – уравнение, описывающее объект.

Пусть Z_t - множество случайных элементов $z(t)$, представляющих собой образ измеримых отображений Φ тройки $(y(t),x(t),f(t))$, где $f(t)$ - произвольный элемент из множества детерминированных числовых, ограниченных при всех фиксированных t, функций, $\Phi: R\times R\times R\to R$. Введем в Z_t два линейных подпространства случайных функций одного аргумента: $Y(t)$ с векторами $y(t)$ и $X(s)$- с векторами $x(s)$. В частном случае $Y(t)$ и $X(s)$ могут совпадать, при этом аргументы принимают значения из одного и того же множества. Множество Z_t образует также линейное пространство $Z(t)$ относительно операций сложения и умножения на борелевскую функцию тех же аргументов t, ограниченную при любых фиксированных значениях аргументов.

Пусть в $Z(t)$ в общем виде задано скалярное произведение $\langle z_1(t),z_2(t)\rangle$, удовлетворяющее следующим условиям. Линейные пространства $Z(t)$, $Y(t)$ и $X(t)$ являются полными метрическими пространствами относительно метрики $\rho(\cdot,\cdot)=\|(\cdot)-(\cdot)\|$, где $\|z(t)\|=\langle z(t),z(s)\rangle^{1/2}$ - индуцируемая данным скалярным произведением норма. В отношении $Z(t)$ предполагается, что норма всех его элементов конечна при любых фиксированных t и s. Таким образом $Z(t)$, $Y(t)$ и $X(t)$ являются гильбертовыми пространствами.

Рассмотрим задачу идентификации нелинейного динамического объекта (1) с входом $x(s)\in X(s)$ и выходом $y(t)\in Y(t)$, модель которого ищется в виде

$$By(t)=ACx(s). \quad (2)$$

Предполагая существование обратного оператора B^{-1}, модель (2) можно записать в виде

$$y(t)=B^{-1}ACx(s). \quad (3)$$

В большинстве работ по методу функциональных преобразований (МФП) [3,4,5] в качестве критерия идентификации используется критерий минимума средней квадратической ошибки:

$$J(A,B,C,y(t),x(s))=\|By(t)-ACx(s)\|^2\to\min_{A,B,C}. \quad (4)$$

<u>Теорема 1.</u> Пусть $Z(t)$ - гильбертовое пространство со скалярным произведением $\langle .,.\rangle=Mz_1(t)z_2(t)$. Пусть пространство входных сигналов системы (1) $X(s)\subset Z(t)$ и пространство выходных сигналов системы (1) $Y(t)\subset Z(t)$ - гильбертовые пространства. Система (1) идентифицируема в классе моделей (2) по критерию (4), если обобщенная взаимная корреляционная функция $R_{yx}^{\mathrm{f}}\neq 0$. При этом идентифицируемая тройка операторов (A',B',C') удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}&(B',C')=\arg\left(\operatorname{cov}\left[By(t),Cx|s\langle\right]=R_{yx}^{™}(t,s)\right),\ R_{yx}^{™}(t,s)\neq 0\\ &D(B'y(t))=D(C'x(s))=1 \qquad (5)\\ &A'=\arg\inf_{A\subset\{A\}}M\|B'y(t)-A'C'x(s)\|^2\end{aligned}$$

где $R_{xx}^{™}(t,s)=M\{[Bx(t)-M[Bx(t)]][Cx(s)-M[Cx(s)]]\}$- обобщенная (функциональная) автокорреляционная функция случайного процесса x(t) [4,5];

$$R_{yx}^{™}(t,s)=\operatorname{cov}[By(t),Cx(s)]=M\{[By(t)-M[y(t)]][Cx(s)-M[Cx(s)]]\}$$

- обобщенная (функциональная) взаимная корреляционная функция двух случайных функций y(t) и x(t) [4,5].

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда 1) тройка операторов (A',B',C'), удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{cov}(B'y(t),C'x(s))=R_{yx}^{\max}(t,s),\\ &D(B'y(t))=D(C'x(s))=1,\ M(B'y(t))=M(C'x(s))=0 \qquad (6)\\ &A'=\arg\inf_{\{A\}}M\|B'y(t)-A'C'x(s)\|^2\end{aligned}$$

принадлежит множеству решений задачи идентификации системы (1) в классе моделей (2) по критерию (4). 2) Если $R_{yx}^{™}(t,s)$=0, то система (1) неидентифицируема.

В случае когда оператор A представляет собой линейный интегральный оператор с весовой функцией $g(s,\tau)$ последнее уравнение в условиях теоремы 2 представляет собой аналог уравнения Винера -Хопфа в линейной корреляционной теории идентификации

$$R_{yx}^{\max}(t,s)=\int_0^{\infty}g(t,\tau)R_{xx}^{™}(s,\tau)d\tau\ . \quad (7)$$

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИДЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Теоремы 1-2 дают формальное теоретическое решение задачи идентификации нелинейного объекта в классе систем, описываемых уравнениями вида (2). Однако, изложенный выше МФП иногда не учитывает влияние систематической составляющей, особенно нестационарных процессов, описываемой математическим ожиданием этих процессов. Поэтому представляет интерес использование идей статистической линеаризации в сочетании с МФП. Для простоты изложения результатов предположим, что в классе моделей (2) существует обратный оператор B^{-1}, а сама модель системы (1) ищется в классе моделей (3). Рассмотрим теперь задачу идентификации нелинейной системы по первому и второму критериям статистической линеаризации.

Первый критерий в данном случае приобретает вид

$$My(t)=My_M(t),\ R_{yy}^{\mathrm{f}}(t,s)=R_{y_My_M}^{\mathrm{f}}(t,s), \quad (8)$$

где

$$y_M(t)=K_oM(B^{-1}ACx(s))+K_1B^{-1}AC\overset{0}{x}(s), \quad (9)$$

где M – знак математического ожидания,
или

$$y_M(t) = K_o AMx(s) + K_1 B^{-1} AC \overset{0}{x}(s) .$$

Пусть A – линейный нестационарный интегральный оператор вида

$$Ax(t,s) = \int_T g(t,s)x(s)ds \; . \qquad (10)$$

Тогда из условий (8) получаем систему уравнений идентификации

$$My(t) = K_o(t)B_t^{-1}\int_T g(t,\tau)MC_t[x(\tau)]d\tau , \qquad (11)$$

$$R_{yy}^{\varphi}(t,s) = K_1(t)K_1(s)\iint g(t,\tau)g(s,\lambda)R_{xx}^{\varphi}(\tau,\lambda)d\tau d\lambda .$$

При использовании второго критерия статистической линеаризации (критерия минимума средней квадратической ощибки) получаем следующую систему уравнений идентификации

$$M(By(t) - K_o(t)\int_T g(t,\tau)C[x(\tau)]d\tau) = 0 \qquad (12)$$

$$R_{yx}^{\varphi}(t,s) = K_1(t)\int_T g(t,\tau)R_{xx}^{\Phi}(s,\tau)d\tau .$$

Уравнения (11) и (12) вытекают из следующей теоремы.
Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда система (1) идентифицируема в классе моделей (2) тогда и только тогда, когда существует и отлична от нуля обобщенная взаимная корреляционная функция $R_{yx}^{\varphi}(t,s) \neq 0$. При этом идентифицируемая тройка операторов (A,B,C) и коэффициенты статистической линеаризации $K_o(t)$ и $K_1(t)$ удовлетворяют первому условию из выражений (5) и уравнениям (11) в случае первого критерия статистической линеаризации и уравнениям (12) в случае применения второго критерия статистической линеаризации.
В отличие от прямого метода МФП данное решение задачи идентификации по данному подходу разбивается на четыре этапа.
На первом этапе определяются операторы B и C – это собственные функции стохастического ядра [4]. На втором этапе определяется коэффициент усиления по случайной составляющей $K_1(t)$. Например $K_1(t) = R_{yy}^{\varphi}(t,s)/R_{xx}^{\varphi}(s,s)$. На третьем этапе определяется оператор A или его весовая функция $g(s,\tau)$, и, наконец, на четвертом этапе определяется коэффициент усиления по систематической составляющей - $K_o(t)$ из первых выражений систем уравнений (11) и (12) в зависимости от выбранного критерия статистической линеаризации.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод моделирования нелинейных систем в классе моделей Винера-Гаммерштейна, использующий идеи метода функциональных преобразований и статистической линеаризации. При этом нелинейное описание объекта заменяется двумя операциями: линейной или в общем случае нелинейной над математическим ожиданием и нелинейной над случайной составляющей.
Доказано существование решения сформулированной задачи идентификации и получены уравнения идентификации. Получено условие идентифицируемости рассматриваемых нелинейных систем. Показано, что частными случаями рассматриваемого метода являются классический метод статистической линеаризации и различные варианты дисперсионной статистической линеаризации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Эйкофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975
[2] Казаков И.Е. Приближенный метод статистического исследования нелинейных систем. Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского . М. Изд-во ВВИА им. Жуковского. 1954. Вып. 394.
[3] Booton R.S. Nonlinear control systems with random inputs. Trans. IRE Profes. Group on Cicuit Theory. 1954, Vol CT-1,№1, p. 9-18.
[4] Пащенко Ф.Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем. Ч.1. Математические основы моделирования систем. М.: Финансы и статистика, 2006
[5] Пащенко А.Ф., Пащенко Ф.Ф. Статистическая линеаризация существенно нелинейных систем. // Моделирование и управление производствами повышенного риска. М.: Институт проблем управления. 1997.
[6] Дисперсионная идентификация под ред. Н.С.Райбмана. М.: Наука, 1981
[7] Казаков И.Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем.