

Одна Характеризация Модели $M|G|1|\infty$

Акоп, Оганесян

Российско-Армянский (Славянский) университет
г. Ереван, Армения

эл. почта: Hovhannisyan@list.ru

АННОТАЦИЯ

В заметке доказано, что показательная функция распределения и геометрическое распределение в качестве стационарных для времени ожидания и числа вызовов в рамках модели $M|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO возникают только и только при показательной функции распределения времени обслуживания.

Ключевые слова.

Модель $M|G|1|\infty$, число вызовов в модели, время ожидания.

1^0 . В настоящей заметке рассматривается модель $M|G|1|\infty$ с параметром $a > 0$ пуассоновского входящего потока и с общей функцией распределения (ФР) B , $B(+0) = 0$ времен обслуживания вызовов при дисциплине FIFO.

Необходимым и достаточным условием существования стационарных времени ожидания начала обслуживания w и числа вызовов в модели ξ является следующее условие, $\rho_1 = a\beta_1 < 1$, где

$\beta_1 = \int_0^\infty x dB(x)$. Обозначим через $W(x)$, $x \geq 0$ ФР

случайной величины (СВ) w и через $\{p_n\}_0^\infty$ распределение дискретной СВ ξ . Тогда

$$\omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dW(x) = \frac{(1-\rho_1)s}{s-a+a\beta(s)}, \quad s \geq 0, \quad (1)$$

где $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ и

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n = \frac{(1-\rho_1)(z-1) \cdot \beta(a-az)}{z-\beta(a-az)}, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (2)$$

В частности, в модели $M|G|1|\infty$, т.е. когда

$$B(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-bx), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad b = (1/\beta_1) > 0, \quad (3)$$

имеем

$$W(x) = 1 - \rho_1 \cdot \exp\left(-\frac{a(1-\rho_1)}{\rho_1} x\right), \quad x \geq 0, \quad (4)$$

$$p_n = (1-\rho_1) \cdot \rho_1^n, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Данная информация имеется, например, в [1].

Наша цель заключается в установлении *обратного* к (3)-(5) утверждения.

Теорема. Дана модель $M|G|1|\infty$ с дисциплиной FIFO. Тогда:

(а) Для справедливости представления

$$W(x) = 1 - e \cdot \exp(-dx), \quad x \geq 0, \quad e \in (0,1), \quad d > 0, \quad (6)$$

необходимо и достаточно выполнение (3).

При этом, $e = \rho_1$, $d = \frac{a(1-\rho_1)}{\rho_1}$;

(б) Для справедливости представления

$$p_n = (1-q_1) \cdot q_1^n, \quad n \geq 0, \quad (7)$$

необходимо и достаточно выполнение (3).

При этом, $q = \rho_1$.

Следует доказать лишь *необходимость* в утверждениях (а) и (б) Теоремы.

Отметим, что из (1) и (2) находятся константы e и q в (6) и (7):

$$1 - \rho_1 = \omega(+\infty) = W(+0) = 1 - e, \quad \text{т.е. } e = \rho_1,$$

$$1 - \rho_1 = P(0) = p_0 = 1 - q, \quad \text{т.е. } q = \rho_1.$$

Приступим к доказательству *необходимости*.

2^0 . (а) Пусть в модели $M|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO справедливо (6) с $e = \rho_1$.

Так как имеет место формула (1), то

$$W_1(x) = \frac{(W(x) - (1-\rho_1))}{\rho_1}, \quad x \geq 0 \quad \text{есть ФР, не имеющая}$$

скачка в нуле. Из (1) несложными преобразованиями получаем

$$\omega_1(s) = \frac{(1-\rho_1)\tilde{\beta}(s)}{1-\rho_1 \cdot \beta(s)}, \quad s \geq 0, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \tilde{\beta}(s) = \frac{1-\beta(s)}{s\beta_1} = \int_0^\infty e^{-sx} d\tilde{B}(x), \\ \tilde{B}(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^x (1-B(u)) du. \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, $\tilde{B}(x)$, $\tilde{B}(+0) = 0$, есть ФР.

Нужно доказать, что из формулы

$$W(x) = 1 - e \cdot \exp(-dx), \quad x \geq 0, \quad d > 0, \quad (10)$$

найденной из (6) с $e = \rho_1$, следует (3). Согласно (10),

$$\omega_1(s) = \frac{(1/d)}{s + (1/d)}, \quad s \geq 0. \quad (11)$$

Приравнивая имеющиеся два представления (8) и (11) для $\omega_1(s)$, после преобразований, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\beta}(s) = \frac{(1/f)}{s + (1/f)}, \quad s \geq 0, \\ \text{или} \\ \tilde{B}(x) = 1 - \exp(-x/f), \quad x \geq 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

где

$$f = d \cdot (1 - \rho_1). \quad (13)$$

Из равенств (см. (9) и (12)) следует

$$\tilde{\beta}_1 = \int_0^{\infty} x dB(x) = \frac{\beta_2}{2\beta_1} = f, \quad \text{где } \beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dB(x).$$

Поэтому $\beta(s) = \frac{\left(\frac{2\beta_1}{\beta_2} \right)}{s + \left(\frac{2\beta_1}{\beta_2} \right)}, \quad s \geq 0$, что дает

$$\beta(s) = \frac{\left(\frac{2\beta_1}{\beta_2} \right) + s \left(1 - \left(\frac{2\beta_1^2}{\beta_2} \right) \right)}{s + \left(\frac{2\beta_1}{\beta_2} \right)}, \quad s \geq 0, \quad (14)$$

Согласно (14) и условию $B(+0) = 0$, заключаем

$$0 = B(+0) = \beta(+\infty) = 1 - \left(\frac{2\beta_1^2}{\beta_2} \right), \quad \text{т.е. } \beta_2 = 2\beta_1^2,$$

откуда и из (14) получаем (3).

3⁰. (б) Пусть в модели $M | G | 1 | \infty$ при дисциплине FIFO справедливо (7) с $q = \rho_1$, т.е. верно (5). Нужно

доказать, что из (5) следует (3). С одной стороны, согласно (2) и (9), $P(z)$ можно записать в виде

$$P(z) = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 \tilde{\beta}(a - az)} \beta(a - az), \quad 0 \leq z \leq 1,$$

а, с другой стороны, из (5) выводим

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 z}, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad \text{Приравнивая эти}$$

два представления для $P(z)$, после несложных преобразований, получаем

$$\rho_1 \frac{\tilde{\beta}(a - az)}{1 - \rho_1 z} = 1 - \beta(a - az), \quad \text{или}$$

$$\frac{\tilde{\beta}(a - az) - z}{\tilde{\beta}(a - az)} = (1 - \rho_1)(1 - z),$$

откуда выводим

$$\tilde{\beta}(a - az) = \frac{1}{\rho_1 + 1 - \rho_1 z} = \frac{(1/\beta_1)}{a(1 - z) + (1/\beta_1)}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Следовательно, $\tilde{\beta}(s) = \frac{(1/\beta_1)}{s + (1/\beta_1)}, \quad s \in [0, a]$. Последняя

формула аналитически продолжается с сохранением вида на область $\{s : \text{Re } s \geq 0\}$, откуда вытекает (3).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания. – М.: МГУ, 1984, 239 с.