Устойчивые подмножества многозначного n–мерного дискретного тора

Vilik Karakhanyan
Institute for Informatics and Automation Problems,
1, P. Sevak str., Yerevan, 0014, Armenia
E-mail: kavilik@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается n–мерный дискретный тор с образующими циклами четной длины, определяются устойчивые подмножества тора и исследуются их свойства.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Дискретный тор, стандартное размещение, устойчивое подмножество.

1. ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Для произвольных целых чисел $1 \le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_n < \infty$ многозначный n–мерный тор $T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / -k_i + 1 \le x_i \le k_i, x_i \in Z, 1 \le i \le n\}$ определяется как множество, в котором вершины $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются соседними, если все их координаты одинаковы, кроме одной, для которой $| x_i - y_i | = 1$ или их значения равны $-k_i + 1$ и k_i.

Для вершин $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, принадлежащих $T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$, определим их ***сумму и разность*** следующим образом: $z = x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \cdots, x_n \pm y_n) = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, где $-k_i + 1 \le z_i \le k_i$ и $z_i \equiv (x_i \pm y_i)(\mathrm{mod}\, 2k_i)$.

Нормой вершины $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем число $\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$, а ***расстоянием между вершинами*** $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - число $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

Через $e_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ обозначим ***единичный вектор*** i ***–его направления***, где $\alpha_j = 0$ при $j \ne i$ и $\alpha_i = 1$, а через $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ – соответсвенно $(1,1,\cdots,1)$ и $(0,0,\cdots,0)$.

Для произвольного подмножества $A \subseteq T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ и любых $i\ (1 \le i \le n)$ и $j\ (-k_i + 1 \le j \le k_i)$ обозначим $A + je_i = \{ x + je_i / x \in A \}$.

Будем рассматривать сечения множеств $T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ и $A \subseteq T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ по i –ому направлению, $1 \le i \le n$, $T^n_i(j) = \{x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n} / x_i = j\}$, $A_i(j) = \{x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in A / x_i = j\} = A \bigcap T^n_i(j)$, где $-k_i + 1 \le j \le k_i$.

Ясно, что $T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n} = \bigcup_{j=-k_i+1}^{k_i} T^n_i(j)$, $A = \bigcup_{j=-k_i+1}^{k_i} A_i(j)$, для любого i, $1 \le i \le n$; и эти разложения мы будем называть, соответственно, разбиениями тора $T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ и множества A по направлению i.

Пусть $A \subseteq T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ - некоторое множество. Скажем, что ***вершина*** $x \in A$ ***внутренняя, если все ее соседние вершины принадлежат множеству*** A. ***В противном случае*** $x \in A$ ***назовем граничной вершиной множества*** A. Обозначим через $B(A)$ и $\Gamma(A)$, соответственно, подмножество всех внутренних и граничных вершин множества A.

Если для множества $A \subseteq T^n_{k_1 k_2 \cdots k_n}$ дано разбиение $A = \bigcup_{j=-k_i+1}^{k_i} A_i(j)$ по i – ому направлению, то через $B(A_i(j))$ и $\Gamma(A_i(j))$ обозначим, соответственно, подмножество внутренних и граничных вершин множества $A_i(j)$ в $(n-1)$ – мерном торе $T^n_i(j)$.

Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторая вершина, то обозначим через $| x |$ вектор $| x | = (| x_1 |, | x_2 |, \ldots, | x_n |)$ и через $\delta(x)$ вектор $\delta(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = 1$ при $x_{n-i+1} > 0$ и $\alpha_i = 0$ при $x_{n-i+1} \le 0$.

Вообще для n – мерных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с неотрицательными целыми координатами скажем, что набор x лексикографически предшествует y (записывается $x \prec y$), если существует такое число r, $1 \le r \le n$, что $x_i = y_i$ при $1 \le i < r$ и $x_r < y_r$.

Теперь упорядочим вершины тора $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ следующим образом.

Вершина x предшествует вершине y (записывается $x \Leftarrow y$), тогда и только тогда, когда

1. $\| x \| < \| y \|$ или
2. $\| x \| = \| y \|$ и $\delta(y)$ лексикографически предшествует $\delta(x)$, или же
3. $\| x \| = \| y \|$, $\delta(x) = \delta(y)$ и $| y |$ лексикографически предшествует $| x |$.

Ясно. что это упорядочение между вершинами тора $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ является линейным порядком.

Определение 2. Для произвольного целого неотрицательного числа a множество первых a вершин тора $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ вышеопределенного линейного порядка назовем ***стандартным размещением*** мощности a .

Пусть $A = \bigcup\limits_{j=-k_i+1}^{k_i} A_i(j)$. Заменим каждое $A_i(j)$ стандартным размещением в $T_i^n(j)$ той же мощности, и это преобразование назовем N_i – ***нормализацией*** множества A относительно i – ой оси. Полученную конфигурацию обозначим через $N_i(A)$.

Ясно, что каждый раз во время N_i – нормализации, если не все $A_i(j)$ являются стандартными размещениями в соответствующих $(n-1)$ – мерных пространствах $T_i^n(j)$, то вместо некоторых вершин множества A берем столько же новых вершин, предшествующих этим вершинам в линейном упорядочении $\Leftarrow$ в $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$. Поэтому, если мы поочередно нормализуем A относительно осей 1, 2, …, *n*, то через конечное число шагов получим ***устойчивое подмножество*** A относительно N_i – нормализаций, т. е. $N_i(A) = A$ при $1 \le i \le n$.

В работе [2] доказываются некоторые свойства стандартного размещения дискретного тора $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$, в частности показано, что стандартное размещение устойчиво относительно N_i – нормализаций. В данной работе исследуются свойства произвольного устойчивого подмножества $A \subseteq T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ относительно N_i – нормализаций.

Заметим, что в n–мерном единичном кубе устойчивые подмножества относительно N_i – нормализаций очень мало отличаются от стандартного размещения [1].

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

Здесь приводим некоторые свойства произвольного устойчивого подмножества дискретного тора $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$.

Теорема. *Если* $n \ge 3$ *и множество* $A \subseteq T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ *устойчиво относительно* N_i *– нормализаций, то*

A. для любого i *и* j , $1 \le i \le n$, $-k_i + 1 \le j \le k_i$ *подмножества* $A_i(j)$ *являются стандартными размещениями в соответствующих* $(n-1)$ *– мерных пространствах* $T_i^n(j)$;

B. для любого j, $0 \le j < k_n - 1$,
$A_n(-j-1) + e_n \subseteq B(A_n(-j))$;

C. для любого j, $1 \le j < k_n$,
$A_n(j+1) - e_n \subseteq B(A_n(j))$;

D. для любого j, $0 \le j < k_n$,
$A_n(-j) \supseteq A_n(j+1) - (2j+1)e_n \supseteq B(A_n(-j))$ *или*
$A_n(-j) = T_n^n(-j)$ *и*
$A_n(j+1) = T_n^n(j+1) \setminus \{(k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, j+1)\}$;

E. для любого j, $1 \le j < k_n$,
$A_n(j) \supseteq A_n(-j) + 2je_n \supseteq B(A_n(j))$ *или*
$A_n(j) = T_n^n(j)$ *и*
$A_n(-j) = T_n^n(-j) \setminus \{(k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, -j)\}$.

Доказательство. Утверждение *A* очевидно.

Докажем утверждение *B*. При $y_i \ne k_i$ обазначим

$$y \oplus e_i = \begin{cases} y + e_i, if \ y_i > 0, \\ y - e_i, if \ y_i \le 0 \end{cases}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, -j-1) \in A_n(-j-1)$, где $0 \le j < k_n - 1$. Тогда вершина $x + e_n \pm e_i$ предшествует x в $T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ для любого $i, 1 \le i < n$, так как

- $\| x + e_n \oplus e_i \| = \| x \|$, $\delta(x + e_n \oplus e_i) = \delta(x)$ и $| x | \prec | x + e_n \oplus e_i |$ когда $x_i \ne -k_i + 1, k_i$,
- $\| x + e_n + e_i \| < \| x \|$, когда $x_i < 0$ или $x_i = k_i$,
- $\| x + e_n - e_i \| < \| x \|$, когда $x_i > 0$,
- $\| x + e_n - e_i \| = \| x \|$ и $\delta(x) \prec \delta(x + e_n - e_i)$ когда $x_i = -k_i + 1$
- $\| x + e_n + e_i \| = \| x \|$ и $\delta(x) \prec \delta(x + e_n + e_i)$ когда $x_i = 0$.

Теперь если i_1 некоторое направление, $i_1 \ne n$, то для любого $i, i \ne i_1$, $i \ne n$ (такой i всегда существует, так как $n \ge 3$), вершины $x + e_n \pm e_i$ предшествуют вершине x в $T_{i_1}^n(x_{i_1})$. А так как $A_{i_1}(x_{i_1})$ – стандартное размещение, то $x + e_n \pm e_i \in A_{i_1}(x_{i_1})$, то есть для любого $i, 1 \le i \le n-1$, $x + e_n \pm e_i \in A$, а это значит, что $x + e_n \in B(A_n(-j))$.

Аналогичным образом доказывается утверждение C .

Докажем утверждение D. Действительно, если $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},j+1)\in A_n(j+1)$, где $0\le j<k_n$, то вершина $x-(2j+1)e_n$ предшествует вершине x в $T_1^n(x_1)$, так как $\|x-(2j+1)e_n\|<\|x\|$. А так как $x\in A_1(x_1)$ и $A_1(x_1)$ –стандартное размещение, то вершина $x-(2j+1)e_n$ принадлежит множеству $A_1(x_1)$, следовательно $A_n(-j)\supseteq A_n(j+1)-(2j+1)e_n$. С другой стороны, если $y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},-j)\in B(A_n(-j))$ и $A_n(-j)\ne T_n^n(-j)$, то существует такое направление i_0, $1\le i_0\le n-1$, что $y_{i_0}\ne k_{i_0}$ и $y\oplus e_{i_0}\in A$. Тогда очевидно, что для любого i, $i\ne i_0$, $i\ne n$ (такой i всегда существует, так как $n\ge 3$), вершина $y+(2j+1)e_n$ предшествует вершине $y\oplus e_{i_0}$ в $T_i^n(y_i)$, а так как $N_i(A)=A$ и $y\oplus e_{i_0}\in A_i(y_i)$, то и вершина $y+(2j+1)e_n$ принадлежит $A_i(y_i)$. Следовательно $A_n(j+1)-(2j+1)e_n\supseteq B(A_n(-j))$.

А если $A_n(-j)=T_n^n(-j)$, то все вершины $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},j+1)$, норма которых меньше или равна $\sum_{i=1}^{n-1}k_i+j$, предшествуют вершине $y_0=(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},-j)$ и лишь одна вершина $y_1=(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},j+1)$ из $T_n^n(j+1)$ может не принадлежать $A_n(j+1)$.

Аналогичным образом доказывается утверждение E.

<u>Следствие.</u> *Если множество* $A\subseteq T^n_{k_1k_2\cdots k_n}$ *удовлетворяет условиям теоремы и* $A_n(j_1)=T_n^n(j_1)$ *для некоторого* $j_1\ge 1$ *, то* $A_n(j)=T_n^n(j)$ *для любого* $j,-j_1+1\le j\le j_1$.

REFERENCES

[1] L. H. Aslanyan, V. M. Karakhanyan, B. E. Torosyan, ”On the compactness of Subsets of Vertices of the n-dimensional unit cube”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 241, N 1 (1978), pp.11-14, Translation in Soviet Math. Dokl., *American Mathematical Society*, v. 19, 4, pp. 781-785, 1978.

[2] V. Karakhanyan, "SOME SUBSET PROPERTIES OF THE MULTIDIMENSIONAL MULTIVALUED DISCRETE TORUS", *International Journal “Information Theories and Applications”*, Vol. 17, Number 2, 2010-11, pp. 163-177.